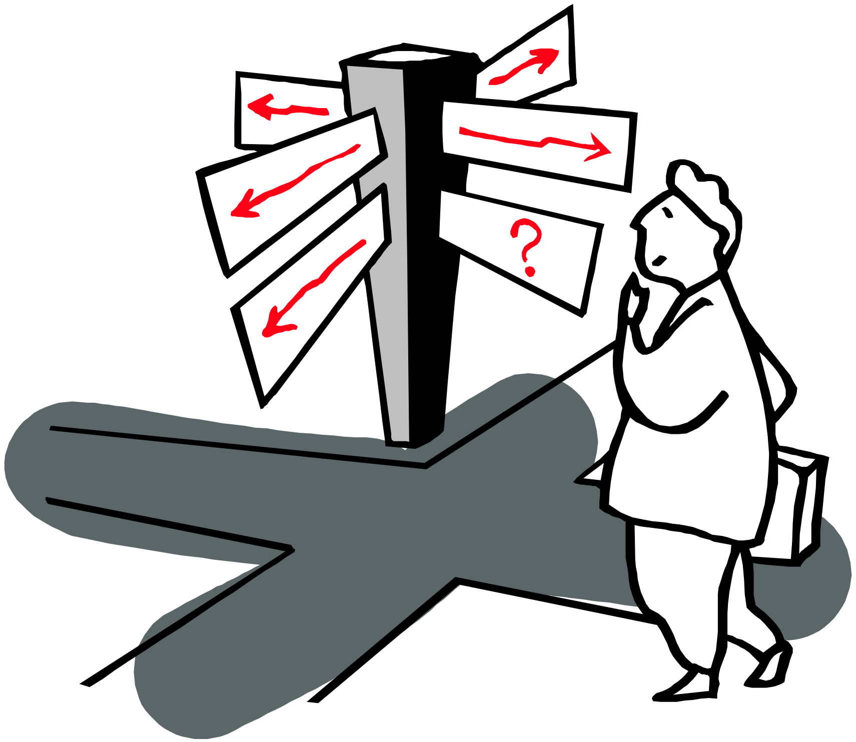


FILOSOFÍA

Lógica II

Antonio Montesinos
IES La Torreta — Elche

TIPOS DE ENUNCIADOS

Una vez que hemos aprendido como calcular la tabla de verdad de una fórmula es hora de reflexionar mínimamente sobre lo que una tabla de verdad puede decirnos.

Es fácil darse cuenta de que solamente puede haber tres tipos de tablas de verdad. El primero de ellos lo forman aquellas tablas de verdad que solamente contienen Vs, el segundo aquéllas que solamente contienen Fs y el tercero está formado por aquéllas que contienen tanto Vs como Fs. Atendiendo a estos tres tipos de tablas de verdad podemos hablar de tres tipos de enunciados. Un enunciado cuya fórmula sólo contenga Vs en su tabla de verdad será un enunciado verdadero en cualesquiera circunstancias, es decir, un enunciado siempre verdadero; o, como les gusta decir a algunos filósofos, verdadero en todos los mundos posibles. A estos enunciados se les da el nombre de tautologías o verdades lógicas. Las tautologías no suelen tener mayor interés cuando se producen en el lenguaje corriente. Constituyen lo que se llaman verdades "de cajón" o perogrulladas y como mucho las usamos para hacer gracia. Por ejemplo (ésta no tiene gracia fuera de su contexto), "Las negras son negras" o "Nos vamos o no nos vamos". En cambi, desde el punto de vista científico son muy interesantes, porque las verdades de las ciencias formales son verdades de este tipo.

Los enunciados cuya fórmula tenga una tabla de verdad en la que solamente haya Fs son enunciados que son siempre falsos (o que no son verdaderos en ninguno de los mundos posibles). Reciben el nombre de contradicciones o de fórmulas inconsistentes. No tienen ningún interés desde el punto de vista de la ciencia ni tampoco desde el lenguaje corriente, como no sea el de ser evitadas.

Aquellos enunciados que no son ni tautológicos ni contradictorios, es decir, aquéllos a los que les corresponden fórmulas en las que están presentes tanto Vs como Fs (dicho más pedantemente, en las que hay al

formalización de todo el razonamiento intuitivo. Ello quiere decir, en el plano lingüístico, que nunca estará acabada la tarea de complementar nuestro lenguaje natural en el orden de la argumentación y el razonamiento.

orden, que la incluye, tampoco lo es.

Con todo, que no haya un procedimiento mecánico para determinar si cualquier fórmula lógica o matemática es o no verdadera puede incluso ser una buena noticia para los matemáticos, que saben que no se quedarán sin trabajo. Si la lógica de segundo orden no fuera decidible, pero fuese completa y consistente, tendríamos la seguridad de que en nuestro cálculo se pueden demostrar todas las verdades y sólo las verdades. Si nuestro cálculo tuviera forma axiomática, podríamos afirmar que nuestros axiomas resumen la verdad, toda la verdad y nada más que la verdad. Pero las cosas no son así.

Kurt Gödel (que había demostrado antes la completud de la lógica de primer orden, lo cual habría bastado para hacerle entrar en la historia de la lógica) demostró en el año 1931 que no es posible construir un sistema de lógica de segundo orden que sea completo y consistente a la vez. Planteémoslo desde el punto de vista de un cálculo axiomático. **NO** puede existir un conjunto de axiomas que nos permita probar todos los teoremas matemáticos sin caer en contradicciones. Si elegimos nuestros axiomas de manera que podamos probar todos los teoremas probaremos también cosas que no lo son, y si elegimos nuestros axiomas de manera que no podamos probar con ellos cosas que no sean teoremas, habrá teoremas que no podremos probar con esos axiomas. Como siempre es preferible la incompletud a la inconsistencia, el teorema de Gödel se denomina teorema de incompletud y se dice que la lógica de segundo orden (y por tanto las matemáticas) es incompleta.

Las consecuencias son importantes. Son importantes tanto para las matemáticas como para la filosofía. Para las matemáticas porque sabemos ahora que nunca existirá una axiomatización definitiva, que siempre habrá verdades matemáticas que no podrán probarse sin ampliar los axiomas.

Para la filosofía, porque nos indica que nunca puede haber una

menos una V y al menos una F) son los enunciados que son verdaderos o falsos según las circunstancias. Se les da el nombre de enunciados consistentes y son los que usamos a cada momento, constituyendo, (cuando pensamos que son verdad y son especialmente interesantes por su contenido) los enunciados que forman las ciencias empíricas. Se dice de ellos que son verdaderos en por lo menos un mundo posible. (Si uno de los mundos posibles en los que son verdaderos es éste, el mundo real, es cuando pueden tener interés para la ciencia).

¿Cómo saber si una fórmula es una tautología, una contradicción o una consistencia? Una manera de saberlo es calculando la tabla de verdad de la fórmula, método que ya conocemos. Este procedimiento reune algunos inconvenientes: es fácil equivocarse (simplemente por confundir alguna fila) y si la fórmula tiene muchas variables (digamos que a partir de cuatro) a las posibilidades de error hay que añadir que el cálculo se hace desesperadamente largo y tedioso.

Existe otro procedimiento que es más corto y no deja tanto lugar a equivocaciones tontas. El inconveniente es que es un poco más difícil. Lo llamaremos procedimiento por reducción al absurdo. Esta expresión "reducción al absurdo" nos la volveremos a encontrar otras veces, por lo que no estará de más detenerse un momento para ver en qué consiste. A un argumento o razonamiento se le llama "reducción al absurdo" (*reductio ad absurdum*) cuando partiendo de lo contrario a aquello que queremos demostrar llegamos a una contradicción (a un absurdo) lo cual demuestra que nuestro supuesto (lo contrario a lo que queremos probar) es imposible. Veamos un ejemplo. El famoso detective valenciano Sants Espill se enfrenta a un caso de hurto con nocturnidad. Uno de los presuntos implicados es Toni Tuerchi, conocido mafioso siciliano que en su juventud fustró la felicidad de nuestro sabueso casándose con la mujer de la que éste había de enamorarse. Sants Espill arde, pues, en deseos de demostrar la culpabilidad de Tuerchi, para que al ser condenado a prisión le deje el campo libre. Veamos como demuestra la culpabilidad utilizando una reducción al absurdo:

"Veamos— dijo Espill limpiándose los cristales de las gafas con rabia mal contenida— supongamos que Tuerchi es inocente. Si es inocente no habría estado en el momento del hurto en el lugar del robo, cosa contraria a los hechos por las fotografías hechas por las cámaras de seguridad. Más aún, si es inocente no tendría razones para mentirnos, cosa que no ha parado de hacer desde que le descubrimos. Por si eso fuera poco, si fuera inocente no llevaría en el bolsillo del pantalón parte de lo robado— exclamó Espill parando triunfante su osuno deambular entre los muebles para introducir su ágil mano derecha en el bolsillo del pantalón de Toni, quien ya no fue capaz de mantener la compostura e imploró que le dejaran en paz que se estaba poniendo nervioso.

Está claro— prosiguió un Espill radiante guiñando un ojo a la Sra. Tuerchi, que le contemplaba arrebolada, rodeada, como siempre, de sus amigas— que suponer la inocencia del bandido Toni Tuerchi sólo conduce a contradicciones con los hechos probados, por lo que sólo cabe una conclusión posible: Es culpable. ¡Que se lo lleven de nuestras vidas!"

Pero no sólo hay ejemplos reales como la vida misma, sino que podemos encontrarlos también en la ciencia. El ejemplo clásico por excelencia es la demostración de Euclides de que no existe un número primo mayor que los demás. El argumento es como sigue. Supongamos que existe un número primo mayor que todos los demás y llamémosle *n*. Formemos ahora el número (2357... *n)+1*, que es el resultado de añadir la unidad al producto de todos los números primos. Este número es evidentemente mayor que y además es primo, puesto que da de resto 1 al dividirlo por cualquiera de los números primos. Ahora bien, como habíamos supuesto que era el mayor de los primos y nos hemos encontrado con un primo mayor que él, hemos llegado a una contradicción, lo que demuestra que es insostenible el supuesto de que existe un número primo mayor que los demás.

Ilustrados por la literatura y la historia pasemos a ver cómo averiguar ante qué tipo de enunciado nos encontramos, utilizando la reducción al absurdo. Si cuando hacíamos una tabla de verdad íbamos desde los valores de las variables hasta los valores de la fórmula, ahora hemos de ir desde el valor de la fórmula hacia los valores de las variables. Veamos cómo mediante un ejemplo. Sea la expresión $(\alpha \wedge \beta) \rightarrow (\alpha \vee \beta)$. Vamos a ver si se trata de una

LOGICA DE SEGUNDO ORDEN

A pesar de la potencia que veíamos en el capítulo anterior que posee la lógica de primer orden para dar cuenta de una enorme cantidad de argumentaciones, ésta tiene limitaciones que la hacen incapaz, por ejemplo, de formalizar la aritmética. En efecto, en la lógica de primer orden no podemos hacer enunciados generales sobre propiedades o relaciones como, pongamos por caso, "Toda relación de equivalencia es simétrica y transitiva". Esto se debe a que en la lógica de primer orden disponemos de *constantes* predicativas, pero no de *variables* predicativas que nos permitan referirnos a cualquier propiedad. Cuando un cálculo lógico nos permite cuantificar no solamente individuos sino también propiedades y relaciones (sean éstas propiedades o relaciones de individuos, propiedades o relaciones de propiedades o relaciones de individuos, o propiedades o relaciones de propiedades o relaciones de propiedades o relaciones de individuos, etc.) se llama lógica de *segundo orden* o de *orden superior*.

La lógica de segundo orden es la lógica en toda su potencia. En el lenguaje de la lógica de segundo orden podemos formalizar cualquier enunciado de las matemáticas, con lo que contaríamos con un lenguaje preciso con el que expresar todo el conocimiento. Un lenguaje especialmente concebido para estar libre de ambigüedades, contradicciones y paradojas. Todo lo que vamos ahora a decir valdrá, pues, para las matemáticas o, en general, para las ciencias formales.

Si la lógica de segundo orden fuese, como la lógica de orden cero, completa, consistente y decidible, estaríamos ante el cumplimiento del ideal algorítmico del que hablábamos de la evolución de la lógica como ciencia. Podemos imaginarnos a los matemáticos sentados ante una máquina de la cual fueran saliendo las demostraciones de los teoremas que componen su ciencia. Pero las cosas no son así. Ya veíamos al hablar de la lógica de primer orden que ésta no era decidible, lo cual supone que la de segundo

REGLA DEL GENERALIZADOR R $\forall$

$$\frac{\forall x\ (\Gamma)}{S_a^x\, \Gamma}$$

(Donde $S_a^x\, \Gamma$ es la fórmula que resulta de sustituir x por a en Γ.)

La semántica de la lógica de primer orden resulta algo más complicada que la de orden cero, pues a la hora de indicar una interpretación debemos señalar como interpretamos cada una de las variables y constantes de todo tipo que aparezcan en nuestras fórmulas. Las definiciones de consecuencia e independencia son, no obstante, las mismas.

Por lo que respecta a las propiedades de la lógica de primer orden hay que señalar que la lógica de primer orden es completa y consistente (una fórmula es deducible de otras si y sólo si es consecuencia de aquéllas). Sin embargo, no es decidible en su conjunto, aunque si algunas de sus partes. Es decir, a este nivel de análisis no existe un procedimiento mecánico para saber si un razonamiento es válido o no.

tautología. Si fuese una tautología no tendría ninguna F en su tabla de verdad. Comprobemos entonces si hay o no alguna F en su tabla de verdad. Para que hubiese una F, dado que se trata de una expresión condicional, debería ser su antecedente verdadero y su consecuente falso. Su antecedente es una conjunción, por lo que para que sea verdadero tanto α como β deben ser verdaderos. En consecuente es una disyunción, por lo que para que sea falso tanto α como β deben ser falsos. Pero como es imposible que α y β sean a la vez verdaderos y falsos, debemos concluir que no puede haber Fs en la tabla de verdad de la fórmula ejemplo y que por lo tanto debe ser una tautología.

Veamos otro ejemplo distinto. Supongamos la expresión

$(\alpha \rightarrow \beta) \leftrightarrow (\alpha \wedge \neg\beta)$

Vamos a ver si se trata de una contradicción. Si es una contradicción entonces es que no hay ninguna V en su tabla de verdad. Comprobemos si hay o no alguna V en su tabla de verdad. Como se trata de una expresión bicondicional, para que sea verdadera caben dos posibilidades: que sus dos componentes sean verdaderos o que sus dos componentes sean falsos. Examinemos ambas posibilidades. Comencemos por la más fácil, que en este caso es cuando son los dos falsos. Para que el primer componente, que es un condicional, sea falso, α debe ser verdadero y β debe ser falso. Pero para que el segundo componente sea falso, como se trata de una conjunción, debe ser falso alguno de sus miembros y eso es imposible, pues ya hemos visto que α era verdadero y que β era falso, y por lo tanto $\neg\beta$ debe ser verdadero. No es, por tanto, posible que ambos componentes sean falsos. Indaguemos en la otra posibilidad, la de que ambos sean verdaderos. Comencemos ahora por el segundo componente (no se trata de ningún capricho, ya que una conjunción sólo tiene una manera de ser verdadera, mientras que un condicional tiene tres) Si el segundo componente, $(\alpha \wedge \neg\beta)$, es verdadero α tiene que ser verdadero y β tiene que ser falso (pues $\neg\beta$

debe ser verdadero). Pero el condicional ($\alpha \rightarrow \beta$) no puede ser verdadero si α es verdadero y β es falso, por lo que los dos miembros de la expresión bicondicional no pueden ser verdaderos a la vez. Si no pueden ser ni ambos verdaderos ni ambos falsos es que el bicondicional no puede ser verdadero y nuestro ejemplo es, por consiguiente, una contradicción.

En resumen, la estrategia a seguir consiste en examinar si es posible que la expresión de que se trate sea verdadera o falsa (empezar por una posibilidad u otra depende un poco del instinto de cada uno). Si nos encontramos con que alguna de las alternativas es imposible, ya habremos acabado. En efecto, si no puede haber Vs es que estamos ante una contradicción, y si es imposible que haya Fs es que estamos ante una tautología. Cuando una expresión no es ni una contradicción ni una tautología es que se trata de una expresión consistente.

RESEÑAS BIOGRAFICAS

EUCLIDES

Matemático griego del siglo III antes de Cristo. Su obra fundamental, *Elementos* constituye un compendio de la geometría conocida en su época. Los Elementos no están constituidos en su totalidad, ni mucho menos, por aportaciones originales de Euclides, pero sí parece obra de él la sistematización axiomática de la geometría. Durante siglos los *Elementos* fueron el libro de geometría por excelencia. Las dudas sobre la independencia del quinto postulado o axioma (Por un punto exterior a una recta sólo puede trazarse una paralela) condujeron a la demostración de su independencia de los demás axiomas. Demostrada la independencia se abrió el camino para las geometrías no-euclídeas, caracterizadas porque en ellas pueden trazarse más o menos de una paralela a una recta dada por un punto exterior a ésta. Estas geometrías han encontrado su aplicación física en las recientes teorías cosmológicas.

Como máximo un libro gana el Planeta.

$\forall x\ \forall y\ ((Lx \wedge Px \wedge Ly \wedge Py) \rightarrow (x=y))$

Hay exactamente dos sospechosos en libertad.

$\exists x\ \exists y\ (Sx \wedge Lx \wedge Sy \wedge Ly \wedge \neg(x=y)) \wedge \forall z\ ((Sz \wedge Lz) \rightarrow (x=z \vee y=z))$

Como puede verse, los cuantificadores nos permiten simbolizar una enorme cantidad de expresiones distintas, con lo que la lógica de primer orden es capaz de atender a una gran cantidad de razonamientos.

Las *descripciones* son el último recurso de simbolización que vamos a estudiar. En el lenguaje natural podemos referirnos a individuos utilizando descripciones de estos, como, por ejemplo, cuando hacemos referencia a Cervantes como "el autor del Quijote" o cuando mencionamos a Judas como "el Apóstol que traicionó a Jesús". La lógica de primer orden nos permite hacerlo también gracias al uso del *descriptor*. El descriptor ('ι') nos permite construir un término (expresión que hace referencia a un individuo) a partir de una fórmula. Así, si 'A' representa 'amar a' y 'a' se refiere a María, la expresión $\iota x(Axa)$ (que leeremos "el x tal que x mantiene con a la relación A) se referirá al que ame a María.

Hasta aquí hemos expuesto (de manera rápida, informal e incompleta) cuáles son los signos de la lógica de primer orden y cuáles las formas correctas de combinarlos. Para definir un cálculo de primer orden deberíamos ahora definir las reglas de construcción y de inferencia pertinentes. Ello nos llevaría muy lejos, de manera que sólo diremos que las deducciones y demostraciones de la lógica de primer orden son como las de la lógica de orden cero, pero con reglas de inferencia apropiadas para tratar con los cuantificadores o el descriptor, pongamos por caso. A título de ejemplo, veamos como sería la Regla del Generalizador.

que todas las cosas son hombres y son mortales, lo cual es mucho decir, y en todo caso algo diferente de decir que todos los hombres son mortales. Además, hay enunciados verdaderos que se refieren a cosas inexistentes, por ejemplo, 'los unicornios tienen un único cuerno'. Si nosotros no utilizásemos un condicional para simbolizarlas obligaríamos a que existiesen los unicornios. Si decimos, en cambio, '$\forall x\ (Ux \rightarrow Cx)$' esto quiere decir que si una cosa es un unicornio tiene un único cuerno, lo cual no nos compromete con la existencia de unicornios.

El particularizador ('$\exists$') nos indica que la variable se refiere al menos a un individuo. Por ejemplo, si 'A' es 'ser alumno' y 'B' es 'aprobar' la fórmula '$\exists x\ (Ax \wedge Bx)$' (que leeremos 'hay al menos un x que tiene la propiedad A y la propiedad B') quiere decir que al menos un alumno aprobará. El particularizador se llama también cuantificador existencial porque, al contrario que el generalizador, afirma la existencia de individuos.

Generalizador y particularizador nos permiten formalizar un gran número de expresiones diferentes. Vamos a ver algunas de ellas:

Todos los sillones tienen brazos.

$\forall x\ (Sx \rightarrow Bx)$

Algunos mamíferos ponen huevos.

$\exists x\ (Mx \wedge Px)$

Ninguna ballena es maleducada

. $\neg\exists x\ (Bx \wedge Mx)$ ó $\forall x\ (Bx \rightarrow \neg Mx)$

No todas las cabras están locas.

$\neg\forall x\ (Cx \rightarrow Lx)$ ó $\exists x\ (Cx \wedge \neg Lx)$

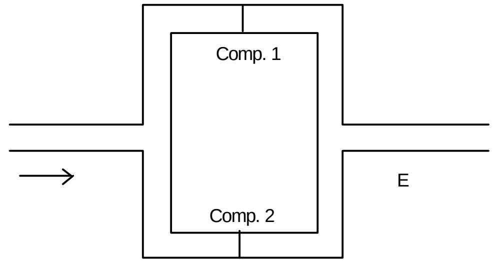
Sólo los helicópteros despegan verticalmente.

$\forall x\ (Dx \rightarrow Hx)$ ó $\neg\exists x\ (Dx \vee \neg Hx)$

SINTAXIS Y SEMANTICA

Hasta ahora hemos estado considerando nuestros signos como representación de enunciados del lenguaje, o dicho de otra manera interpretábamos nuestras variables como enunciados, las utilizábamos como si fueran enunciados del lenguaje. Sin embargo, nada nos obliga a hacerlo así. Por ejemplo, podemos imaginar un sistema de canales de riego en el que cada compuerta puede estar en dos posiciones: abierta o cerrada. Dado un determinado circuito de canales, ¿qué compuertas deben estar abiertas o cerradas para que el agua llegue (o deje de llegar) a un determinado punto?

FIGURA 1



CIRCUITO DE CANALES
(Dos compuertas)

Supongamos el circuito de canales representado en la Figura 1. Se trata de un circuito que posee dos compuertas, que en el gráfico aparecen como Com. 1 y Com. 2. La dirección del flujo del agua viene indicada por una flecha. ¿Cómo deben estar las compuertas para que el agua llegue al extremo E? Evidentemente, basta con que haya una abierta para que el agua llegue a E.

Simbolicemos la compuerta 1 como α y la compuerta 2 como β. Si cada compuerta puede estar cerrada (C) o abierta (A) la siguiente tabla nos refleja cuando el agua llega o no al final del circuito:

α	β	Circuito
A	A	A
C	A	A
A	C	A
C	C	C

Esta tabla es idéntica a la tabla de verdad de la disyunción si sustituimos las As por Vs y las Cs por Fs. Por lo tanto, podríamos representar el circuito de la Figura 1 mediante la fórmola $\alpha \vee \beta$, ya que sólo podemos considerarlo cerrado si las dos compuertas están cerradas a la vez. La expresión "$\alpha \vee \beta$" hace aquí referencia a canales y compuertas, su interpretación no es, por tanto, el lenguaje.

Consideremos ahora otro ejemplo, el del Algebra de Boole (también llamada, a veces, lógica de clases). ¿En qué condiciones un elemento pertenece a la clase intersección de dos conjuntos? Simbolicemos los dos conjuntos mediante α y β, y su intersección mediante $\alpha \wedge \beta$. "P" significa que un elemento pertenece a una clase y "N" que no pertenece. La siguiente tabla nos dice cuando un elemento pertenece a $\alpha \wedge \beta$.

α	β	$\alpha \wedge \beta$
P	P	P
N	P	N
P	N	N
N	N	N

La tabla nos dice que (como ya sabíamos) sólo pertenecen a la intersección de dos conjuntos aquéllos elementos que pertenecen a ambos conjuntos. "$\alpha \wedge \beta$" podría ser, pues, una simbología sustitutoria de "$A \cap B$". Nuestras variables se interpretan como conjuntos y los conectores como operaciones entre ellos.

Vamos a ver aún otro ejemplo. ¿Cómo funciona un ordenador electrónico? Evidentemente, mediante circuitos electrónicos. Por estos circuitos circula una corriente eléctrica que puede tomar dos intensidades, alta y baja. Mediante transistores pueden construirse circuitos que ofrecen una señal de salida (alta o baja) en función de la señal o señales que reciban. Uno de estos circuitos es el circuito NOT, que cambia el tipo de señal: la alta la hace baja y la baja alta. Otro es el circuito AND, que sólo da una señal alta si sus dos entradas son altas y otro el OR, que sólo da una salida baja si sus dos entradas son bajas. La correspondencia con '$\neg$', '$\wedge$' y '$\vee$' es notoria.

Las Figuras 2 y 3 representan estos circuitos básicos. La Figura 2 nos presenta los esquemas de sus circuitos eléctricos mientras que la Figura 3

'H' y 'ser mortal' como 'M' podemos simbolizar 'Sócrates es hombre' como 'Ha' y 'Sócrates es mortal' como 'Ma'. Pero ¿cómo simbolizar 'Todos los hombres son mortales' que no hace referencia a ningún individuo concreto sino más bien a una clase de ellos? No podemos porque sólo podemos hacer referencia a individuos mediante el equivalente a los nombres propios y no disponemos del equivalente a los nombres comunes.

Para referirnos a un individuo cualquiera (como hacen los nombres comunes) utilizaremos *variables individuales* que simbolizaremos por medio de las últimas letras minúsculas del alfabeto latino: 'x', 'y', etc. Expresiones como 'Ax' ('x tiene la propiedad A') no tienen un equivalente claro en el lenguaje natural, que no tiene un equivalente preciso a las variables individuales. El mecanismo del lenguaje natural que más se parece son los pronombre, pues 'él', por ejemplo, puede hacer referencia a quien convenga en un momento determinado. Si decimos 'ella es la más alta' no estaremos ante un enunciado mientras no determinemos a quién se refiere el pronombre 'ella'. Lo mismo sucede con 'Ax' mientras no definamos el alcance de la variable.

Disponemos de un procedimiento para determinar a cuantos individuos se refieren nuestras variables: la cuantificación. Vamos a usar dos *cuantificadores*, el *generalizador* o cuantificador universal y el *particularizador* o cuantificador existencial.

El generalizador ('$\forall$') nos indica que la variable se refiere a todos los individuos. Así pues, si 'A' significa 'es bello', el significado de '$\forall$x (Ax)' (leído 'para todo x, x tiene la propiedad A') sería 'Todas las cosas son bellas' o 'Todo es bello'. Con ayuda del generalizador podemos ya simbolizar la primera premisa de nuestro ejemplo. 'Todos los hombres son mortales' quedaría '$\forall$x (Hx $\rightarrow$ Mx)' (para todo x, si x es un hombre entonces x es mortal). Hay que gastar dos palabras hablando del condicional que aparece en la expresión anterior. Si escribiéramos '$\forall$x (Hx $\wedge$ Mx)' estaríamos diciendo un papel semejante a los nombres propios del lenguaje natural. Como símbolos para las constantes individuales utilizaremos las primeras letras del alfabeto latino 'a', 'b', etc. Así, mediante 'a' podemos referirnos, por ejemplo, a Napoleón, o a Rintintín o a Manolito.

Usaremos también *constantes predicativas* para referirnos a propiedades de los individuos e igualmente a las relaciones que pueda haber entre ellos. Usaremos letras latinas mayúsculas ('A', 'B', etc. con subíndices si es necesario para indicar el número de individuos implicados en la relación) para referirnos a propiedades y relaciones. De este modo 'A' puede servir para simbolizar 'ser emperador', 'ser valiente' o 'ser elegante'.

Con constantes individuales y predicativas podemos ya construir nuestras primeras fórmulas para simbolizar enunciados. 'Aa' puede querer decir 'Napoleón es emperador' y lo leemos 'a tiene la propiedad A'. 'Juan ama a Teresa' puede simbolizarse como 'Bbc' refiriéndose 'b' a Juan, 'c' a Teresa y significando 'B' 'amar a'. Como son fórmulas podemos combinarlas mediante los conectores. Así, 'Aa $\wedge$ Bbc' significaría 'Napoleón es emperador y Juan ama a Teresa'.

A veces nos referimos a un individuo no por su nombre, sino por alguna relación que mantiene con otra persona. Podemos decir, por ejemplo, 'el padre de Federico' o 'la ciudad de Bach' o 'el novio de Ester'. 'el padre de' o 'la ciudad de' nos transforman un nombre en otro nombre, ('Federico' en 'el padre de Federico' o 'Bach' en 'la ciudad de Bach'). Llamamos *funtores* a este tipo de expresiones y las simbolizamos con las letras minúsculas 'f', 'g', etc. De este modo, 'fb' puede significar 'el padre de Juan'. Como 'fb' se refiere a un individuo podemos decir cosas sobre él construyendo fórmulas como 'Cfb', que puede referirse a 'el padre de Juan es valiente'.

Con lo que hemos visto hasta ahora podemos formalizar parte del argumento que poníamos como ejemplo al principio del capítulo. Si nos referimos a Sócrates por medio de 'a', y simbolizamos 'ser un hombre' como

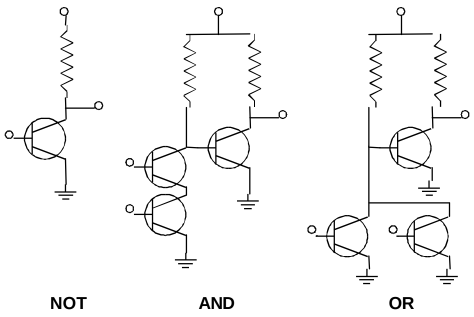


Figura 2

nos muestra los símbolos gráficos con los que se representan. Combinando estas "puertas lógicas" se pueden construir circuitos que ejecuten cualesquiera operaciones, como ilustra la Figura 4.

La Figura 5 nos muestra el circuito correspondiente a la disyunción excluyente, que como veíamos equivale a $(\neg\alpha€\wedge \beta) \vee (\alpha \wedge \neg\beta)$. A esta puerta lógica se la denomina XOR. La Figura 6 representa un circuito que permite sumar dos números (en base 2, o sea, dos dígitos binarios (bits)). Enlazando circuitos como éste pueden sumarse números de cualquier longitud, y si podemos sumar podemos realizar cualquier operación aritmética. Diseñar un ordenador electrónico tiene, pues, mucho que ver con ser capaz de manejar el lenguaje lógico.

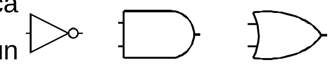


Figura 3

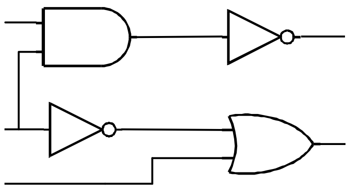


Figura 4

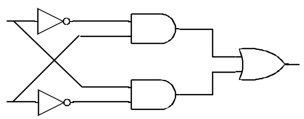


Figura 5

Si, como hemos visto, nuestros signos no están unidos necesariamente a una interpretación concreta, sino que son susceptibles de ser interpretados de muchas maneras diferentes, es que gozan de una vida independiente de las interpretaciones que hagamos de ellos. Podemos, pues, estudiar-los con independencia de cualquier interpretación posible. Será éste un estudio

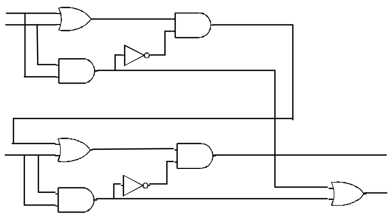


Figura 6

meramente "sintáctico", es decir, solamente estudiaremos las relaciones que existen entre los signos sin tener en cuenta sus posibles significados. Llamaremos formalismos a estos signos y combinaciones de signos desprovistos de significación. En la sintaxis estudiaremos los formalismos con independencia de sus interpretaciones. Si interpretamos un formalismo atribuyendo significado a sus signos lo habremos convertido en un lenguaje formal. El estudio de las condiciones que debe cumplir toda interpretación posible de un formalismo es el objeto de la semántica.

LÓGICA DE PRIMER ORDEN

Hasta este momento hemos estudiado lógica de orden cero. Hemos caracterizado la lógica de orden cero como aquella que detenía su análisis sin entrar a considerar la estructura interna de los enunciados. Esto hace que quede bastante limitada a la hora de su aplicación a las argumentaciones del lenguaje natural.

Por ejemplo, una argumentación tan sencilla (y tan clásica) como

Todos los hombres son mortales
Sócrates es hombre
―――――――
Sócrates es mortal

no queda reflejada en su estructura por la lógica de orden cero. En efecto, como tanto las premisas como la conclusión son enunciados simples una posible manera de representar el argumento sería

α
β
―――――――
γ

que no es un argumento válido, como puede comprobarse atendiendo a una interpretación que satisfaga α y β y no satisfaga γ. La lógica de orden cero no nos sirve, por lo tanto, para aquellos argumentos válidos cuya validez radique en la estructura interna de los enunciados que forman premisas y conclusión.

Nuestra lógica debe ser ampliada si es que queremos que cubra también estos razonamientos. Vamos a ver brevemente en qué consiste el primer nivel de ampliación, así como las propiedades que tiene.

La *lógica de primer orden* se ocupa de la estructura de los enunciados. Para ello necesitamos definir nuevos tipos de símbolos. Veamos cuáles son éstos.

En primer lugar, utilizaremos *constantes individuales* que desempeñan obligan a abrir dos ramas si para la verdad o falsedad de la fórmula basta con la verdad o falsedad de una de las ramas y nos obliga a continuar con una sola rama si la verdad o falsedad del enunciado al que aplicamos la regla necesita de la verdad o falsedad de las dos ramas.

Si un cálculo es completo y consistente, podemos pasar sin problemas de la sintaxis a la semántica y viceversa, pues toda verdad sintáctica tiene su correspondiente en la semántica y lo mismo al contrario. Se dice que sintaxis y semántica son equivalentes. En la lógica de orden cero lo son.

La lógica de orden cero tiene además otra propiedad y es la de la decidibilidad. Un cálculo es decidible si existe un procedimiento (automático o mecánico) para determinar la validez o invalidez de los argumentos. Las tablas de verdad son este procedimiento, pues ya vimos como si hacemos las tablas de verdad de las premisas y de la conclusión de un argumento el argumento será válido si siempre que todas las premisas son verdaderas la conclusión también lo es, e inválido en caso contrario.

En conclusión, la lógica de orden cero es completa, consistente y decidible.

SINTAXIS DE UN FORMALISMO (ORDEN CERO)

Iniciamos ahora el estudio *sintáctico*, decir, dejando de lado las posibles interpretaciones que puedan tener nuestros símbolos, de un formalismo de orden cero. Nosotros habíamos hablado ya de lógica de orden cero refiriéndola al nivel de análisis de nuestro discurso descriptivo que se detiene en los enunciados atómicos sin pasar a contemplar la estructura de éstos. Un formalismo de orden cero, o formalismo de conectores, es, para seguir con la interpretación que nos es familiar, el correspondiente a una lógica de conectores. Pero la mejor manera de saber qué cosa es un formalismo de orden cero es definir uno. Un formalismo, decíamos en el capítulo anterior, es un conjunto de símbolos que mantienen entre sí unas ciertas relaciones, por lo que las dos primeras cosas que debemos decir de nuestro formalismo son: a) los signos que forman parte de él y b) las combinaciones de estos signos que vamos a admitir como correctas. Vamos a ello.

El repertorio de signos de nuestro formalismo incluye tres clases de signos: signos variables, signos constantes (o signos lógicos) y signos auxiliares.

1- Variables: Utilizamos como signos de variable las letras griegas minúsculas, α, β, γ, δ, ... añadiéndoles, en su caso, los pertinentes índices o subíndices, ya que forman un conjunto infinito numerable: hay tantas como números naturales.

2- Constantes: Son sólo cinco. Al ser tan pocos podemos darles nombres propios. Son el negador ($\neg$), el conyuntor ($\wedge$), el disyuntor ($\vee$), el condicionador ($\rightarrow$) y el bicondicionador ($\leftrightarrow$).

3- Signos auxiliares: En esta clase están incluidos los paréntesis, corchetes, comas, puntos, guiones y demás signos de puntuación.

Si escribimos nuestros signos unos detrás de otros formaremos filas de signos. Una fila de signos es, por tanto, una sucesión finita y no vacía de signos. Ejemplos de filas de signos son: "(α $\neg$, β , $\wedge$ (", "($\neg\alpha$ $\wedge$ β)", "$\neg\vee\wedge\rightarrow\leftrightarrow$", "$\gamma$".

No todas las filas de signos posibles nos interesan por igual, sino que hay unas, a las que llamaremos fórmulas o también expresiones bien formadas, que son las que a nosotros nos importan. Haciendo una analogía con el lenguaje cotidiano, podemos decir que no todas las sucesiones de letras forman palabras o que no todas las sucesiones de palabras forman oraciones correctas. Nuestras fórmulas se corresponden con las palabras o con las oraciones correctamente construidas (desde el punto de vista meramente morfosintáctico).

¿Cómo distinguir una fórmula de una fila de signos que no lo sea? Evidentemente no puede ofrecerse una lista de todas las fórmulas, ya que son infinitas en número, por lo que la manera de comprobar si una fila de signos es una fórmula es ver si está construida ateniéndose a las reglas de formación de nuestro formalismo. (De la misma manera que en el lenguaje común sabemos si una oración es correcta o no comprobando si se ajusta o no a las reglas gramaticales). Las reglas de formación constituyen, pues, una definición de lo que entendemos por fórmula o expresión bien construida. Una definición completa de fórmula llevaría consigo la regulación del uso de los paréntesis y de los demás signos auxiliares. Una definición así no es necesaria para nuestros propósitos, por lo que nuestras reglas de formación sólo hacen referencia al uso de las variables y de las constantes, ya que es más fácil usar correctamente los paréntesis que entender las reglas explícitas que gobiernan su uso.

REGLAS DE FORMACION

1ª. Una variable sola es una fórmula. Ej. α, β, ε son fórmulas.

2ª. Una fórmula precedida por un negador es también una fórmula. Ejemplos: $\neg\alpha$, $\neg\neg\beta$.

Puede probarse (no vamos a hacerlo aquí) que la conjunción de las fórmulas de un conjunto insatisfacible puede traducirse siempre a una expresión del tipo

$$(A \wedge \neg A) \vee (B \wedge \neg B) \vee (\Gamma \wedge \neg\Gamma) \vee ...$$

(estas fórmulas reciben nombre de Formas Normales Disyuntivas). Si ponemos ahora esa fórmula como premisa en un árbol podemos escribir como conclusión cualquier fórmula, ya que utilizando unicamente la premisa obtendremos en todas las ramas una fórmula y su negación. Como esa fórmula es equivalente a Δ junto con A, también podemos construir un árbol que tenga como premisas los elementos de Δ y A con independencia de cuál sea la conclusión. En particular

$$\Delta, \neg A \therefore A$$

y por el Teorema 3 de la sintaxis tenemos que

$\Delta \therefore A$, que es lo que queríamos probar.

Por lo tanto, si una argumentación es válida podemos construir un árbol para ella en nuestro cálculo.

Un cálculo es *consistente*, o semánticamente correcto, cuando en él es imposible deducir una fórmula de otras si no es consecuencia de ellas, o expresado de otra manera, un cálculo es consistente si siempre que una fórmula es deducible de otras también es consecuencia de ellas. Si el teorema de completud dice que si A es consecuencia de Δ entonces $\Delta \therefore A$, es de consistencia o corrección dice que si $\Delta \therefore A$ entonces A es consecuencia de Δ.

Para probar este teorema deberíamos repasar todas nuestras reglas de construcción y de inferencia para comprobar que cada una de ellas garantiza la corrección semántica. No lo vamos a hacer aquí de forma detallada, pero es fácil darse cuenta de que sucede así, pues nuestras reglas nos

PROPIEDADES DE UN CÁLCULO (ORDEN CERO)

Un cálculo deductivo se construye con el propósito de que sea aplicable al estudio de argumentaciones o razonamientos, (o a sus correspondientes en otras interpretaciones). Por ello es deseable que haya un paralelismo o correspondencia entre la deducibilidad (que es un concepto de la sintaxis) y la consecuencia (que es un concepto semántico). Este paralelismo será total cuando el cálculo sea *completo* y *consistente*.

Un cálculo es completo cuando siempre que una fórmula es consecuencia de otras también es deducible de ellas. Dicho con otras palabras, un cálculo es completo cuando en él podemos construir un árbol para cualquier argumento válido. Los cálculos de la lógica de orden cero son completos. Los teoremas que demuestran que un cálculo es completo reciben el nombre de Teoremas de Completud. Estaría fuera de lugar demostrar el teorema de completud de nuestro cálculo, por lo que solamente lo esbozaremos a título ilustrativo.

Teorema de Completud:

Si A es consecuencia de Δ entonces $\Delta \therefore \mathrm{A}$.

Prueba (esbozo):

Si A es consecuencia de Δ entonces para toda interpretación I si I sat Δ entonces I sat A.

Por tanto, no existe ninguna interpretación I tal que I sat Δ e I no sat A.

Como I sat $\neg \mathrm{A}$ si y sólo so I no sat A, no existe ninguna interpretación I tal que I sat Δ e I sat $\neg \mathrm{A}$.

Por tanto Δ junto con $\neg \mathrm{A}$ forman un conjunto insatisfacible de fórmulas (no es posible satisfacer a todos sus elementos al tiempo).

3ª. Un conyuntor, un disyuntor, un condicionador o un bicondicionador colocados entre dos fórmulas forman a su ver una fórmula. Por ejemplo: $\alpha \vee \beta$, $\neg\alpha \rightarrow \delta$, $(\neg\neg\beta \wedge \gamma) \leftrightarrow \gamma$.

Una fila de signos es una fórmula si está formada de acuerdo con las tres reglas de formación. Veamos un ejemplo. Sea la fila de signos a®(bÚa), ¿es o no una fórmula? Se trata de una expresión formada por un condicionador que se halla entre dos expresiones. De acuerdo con la regla tercera estaremos ante una fórmula si las dos expresiones entre las que se encuentra el condicionador son a su vez fórmulas. La primera de ellas es una variable sola. por lo que, conforme a la regla primera, es una fórmula. La expresión que sigue al condicionador está constituida por dos expresiones que tienen entre sí un disyuntor. Según la regla tercera será una fórmula si ambas expresiones son fórmulas. Como las dos son variables solas y, por la regla primera, son fórmulas, la expresión que va entre paréntesis es también una fórmula y, por lo tanto, la expresión completa lo es a su vez.

Para acabar, unas palabras sobre la definición de fórmula. Las reglas segunda y tercera nos hablan sobre fórmulas, es decir, se refieren a aquello que estamos definiendo. Las definiciones de este tipo reciben el nombre de definiciones recursivas, y son un tipo muy importante de definiciones, pues nos permiten definir, por ejemplo, conjuntos infinitos como el de las fórmulas, pongamos por caso.

CALCULO DEDUCTIVO

Al igual que en el lenguaje ordinario se dan determinadas relaciones entre las expresiones que lo forman, (por ejemplo, podemos transformar oraciones pasivas en sus correspondientes activas, o podemos concluir unas oraciones a partir de otras a través de razonamientos), también entre las fórmulas de un formalismo existen determinadas relaciones que podemos estudiar. En particular nos interesa la relación de *deducibilidad* entre fórmulas, porque podremos aplicarla después a la relación de consecuencia lógica entre enunciados. Para poder definir la relación de deducibilidad debemos primero definir un cálculo deductivo.

Un *cálculo deductivo* es un conjunto de reglas. La aplicación de estas reglas a las fórmulas de un formalismo nos permite decir si entre unas fórmulas y otras existe determinada relación, en particular, si una fórmula es deducible de otras. En nuestro cálculo existen dos tipos de reglas. Las que pertenecen al primer tipo reciben el nombre de *reglas de inferencia* o también de *reglas de transformación* porque nos permiten pasar de unas fórmulas a otras (o dicho de otro modo, nos permiten transformar unas fórmulas en otras). Las reglas que pertenecen al segundo tipo reciben el nombre de *reglas de construcción* y nos sirven para construir "árboles". A continuación se enumeran las reglas de inferencia. Más adelante veremos algunas reglas de inferencia además de éstas, pero las definiremos (por eso las llamaremos definidas o derivadas) a partir de las que ahora veremos (las cuales, por eso, se denominan primitivas).

La lista de las reglas de inferencia tiene tres columnas. En la primera aparece el nombre de la regla, en la segunda su esquema y en la tercera su nombre abreviado. (En los esquemas aparecen letras griegas mayúsculas porque las reglas se refieren a fórmulas y no a variables de enunciado solamente.)

REGLAS DE INFERENCIA

Si nos fijamos en la columna central, en la que aparecen los esquemas, podemos apreciar que el eesquema está dividido en dos partes por una línea horizontal. El esquema (y en general la regla) debemos interpretarlo como una instrucción que nos dice que cuando nos encontremos en un "árbol" con una

Una manera más larga, pero más mecánica, de saber si un argumento es o no válido es hacer las tablas de verdad de las premisas y de la conclusión. Si *siempre* que las premisas son verdaderas lo es también la conclusión el argumento es válido, y si no es inválido.

una fórmula no es consecuencia de otras decimos que es independiente de ellas.

La importancia de las nociones de consecuencia y de independencia radica en que nos permiten precisar en qué consiste el que un argumento sea o no válido:

Un argumento o razonamiento es válido si su conclusión es consecuencia de sus premisas e inválido o falaz si es independiente de ellas.

¿Cómo demostrar que un argumento es inválido? Pues por medio de una prueba de independencia, que consiste en mostrar que es posible que todas las premisas sean satisfechas por una interpretación que a su vez no satisfaga a la conclusión. En estos casos lo mejor es ver algunos ejemplos.

Ejemplo 1. Probar que $\alpha \to \neg\alpha$ es independiente de $\alpha \vee \neg\alpha$.

Lo que se nos pide es encontrar una interpretación que satisfaga $\alpha \vee \neg\alpha$ y que no satisfaga $\alpha \to \neg\alpha$. Cualquier interpretación que no satisfaga $\alpha \to \neg\alpha$ tiene que satisfacer α. Como una interpretación que satisfaga α satisface también $\alpha \vee \neg\alpha$ ya hemos encontrado lo que buscábamos. En efecto, $\alpha \to \neg\alpha$ es independiente de $\alpha \vee \neg\alpha$ porque una interpretación que satisface α, satisface $\alpha \vee \neg\alpha$ y no satisface $\alpha \to \neg\alpha$.

Ejemplo 2. Probar que $\alpha \vee \neg\gamma$ es independiente de $\alpha \to \beta$ y $\beta \to \gamma$.

Debemos encontrar ahora una interpretación que satisfaga $\alpha \to \beta$ y $\beta \to \gamma$ y que al mismo tiempo no satisfaga $\alpha \vee \neg\gamma$. Para que una interpretación no satisfaga $\alpha \vee \neg\gamma$ debe no satisfacer α y no satisfacer $\neg\gamma$ y satisfacer, por tanto, γ. Una interpretación que no satisface α satisface $\alpha \to \beta$ y una interpretación que satisface γ satisface también $\beta \to \gamma$. Por tanto, una interpretación tal que no satisfaga α y satisfaga γ demuestra que $\alpha \vee \neg\gamma$ es independiente de $\alpha \to \beta$ y $\beta \to \gamma$.

Regla de REPETICION	$\dfrac{A}{\begin{array}{c}\vert\\ A\end{array}}$	RR
Regla del DOBLE NEGADOR	$\dfrac{\neg\neg A}{\begin{array}{c}\vert\\ A\end{array}}$	R $\neg\neg$
Regla del CONYUNTOR	$\dfrac{A\wedge B}{\begin{array}{c}\vert\\ A\\ \vert\\ B\end{array}}$	R $\wedge$
Regla del CONYUNTOR NEGADO	$\dfrac{\neg(A\wedge B)}{\neg A \quad \neg B}$	R $\neg\wedge$
Regla del DISYUNTOR	$\dfrac{A\vee B}{A \quad B}$	R $\vee$
Regla del DISYUNTOR NEGADO	$\dfrac{\neg(A\vee B)}{\begin{array}{c}\vert\\ \neg A\\ \vert\\ \neg B\end{array}}$	R $\neg\vee$
Regla del CONDICIONADOR	$\dfrac{A\to B}{\neg A \quad B}$	R $\to$
Regla del CONDICIONADOR NEGADO	$\dfrac{\neg(A\to B)}{\begin{array}{c}\vert\\ A\\ \vert\\ \neg B\end{array}}$	R $\neg\to$
Regla del BICONDICIONADOR	$\dfrac{A\leftrightarrow B}{\begin{array}{c}\vert\\ A\to B\\ \vert\\ B\to A\end{array}}$	R $\leftrightarrow$
Regla del BICONDICIONADOR	$\dfrac{\neg(A\leftrightarrow B)}{\neg(A\to B) \quad \neg(B\to A)}$	R $\neg\leftrightarrow$

fórmula que tenga la estructura de alguna de las que están sobre la línea horizontal podemos escribir en algún lugar por debajo de ella lo que hay por debajo de la línea horizontal.

En segundo lugar podemos observar que si hacemos excepción de la regla de REPETICIÓN (RR) existe una regla y sólo una para cada tipo de fórmula, coincidiendo el nombre de la regla con el de la estructura de la fórmula a la que se aplica.

Dado un conjunto de fórmulas Δ (que puede ser $\varnothing$) y una fórmula A podemos construir un "árbol" siguiendo las reglas de construcción que se citan a continuación.

REGLAS DE CONSTRUCCIÓN

1ª. La primera línea del árbol es $\neg A$.

2ª. En cualquier momento puede escribirse como línea válida cualquier elemento de Δ.

3ª. Cualquier otra línea del árbol es el resultado de aplicar una regla de inferencia a alguna de las líneas ya existentes.

La mejor manera de entender qué es un árbol y cómo construir uno es por medio de un ejemplo, así que vamos a ello. Supongamos la fórmula $\neg\alpha$ y el conjunto de fórmulas que tenga como elementos a $\alpha\to\beta$ y $\neg\beta$. La regla primera de las de construcción nos permite escribir

1	$\neg\neg\alpha$

puesto que $\neg\neg\alpha$ es la negación de $\neg\alpha$. El '1' que aparece a la izquierda es el número de la línea, número que nos permitirá referirnos a ella.

Como nuestro conjunto de fórmulas tiene dos elementos podemos escribirlos en las líneas 2 y 3 del árbol, con lo que éste quedará así:

1	$\neg\alpha$	
2	$\alpha\to\beta$	P
3	$\neg\beta$	P

Las Ps que aparecen a la derecha de las líneas 2 y 3 nos indican que

I sat $A \vee B$\1 si y sólo si I sat A o I sat B.

I sat $A \to B$\1 si y sólo si I no sat A o I sat B.

I sat $A \leftrightarrow B$\1 si y sólo si (I sat A y I sat B) o (I no sat A y I no sat B).

La definición de satisfacción es también una definición del concepto de verdad en los lenguajes formales. Una expresión es verdadera en una determinada interpretación si y sólo si esa interpretación la satisface. (Es fácil darse cuenta de la correspondencia entre la definición de satisfacción que se acaba de dar y el recuadro que resumía las tablas de verdad. Nuestras tablas de verdad son, pues, tablas semánticas, y así son llamadas en muchos libros.)

Al igual que hemos generalizado nuestra noción de verdad a la de satisfacción, que no está restringida a una interpretación concreta, podemos generalizar nuestras definiciones de los tipos de fórmula para que nos valgan para todas las interpretaciones posibles.

Si todas las interpretaciones satisfacen una fórmula diremos que es lógicamente válida (tautología).

Si ninguna interpretación satisface una fórmula diremos que ésta es insatisfacible (contradicción).

Si hay al menos una interpretación que satisfaga una fórmula diremos que es satisfacible.

La noción de satisfacción nos permite también hacer la que es, quizás, la definición más importante de la lógica, la de ***consecuencia lógica***:

UNA FÓRMULA A ES *CONSECUENCIA* DE OTRAS Δ SI TODAS LAS INTERPRETACIONES QUE SATISFACEN TODAS LAS FÓRMULAS DE Δ SATISFACEN TAMBIÉN A.

El concepto opuesto al de consecuencia es el de independencia. Si

SEMÁNTICA

En el estudio sintáctico hemos tratado exclusivamente con signos y hemos estudiado combinaciones de ellos (filas de signos, fórmulas, etc.) y ciertas relaciones que pueden darse entre algunas de esas combinaciones (deducibilidad, por ejemplo), pero no nos preocupaba a qué pudieran referirse nuestros signos, cuál era su significado. Al estudiar la semántica lógica estudiaremos ciertos conceptos relacionados con la asignación de significado a nuestros símbolos.

Como nuestro enfoque es lo más general posible no nos interesa cuál pueda ser el significado que en un momento determinado puedan tener nuestros signos, sino más bien cuáles deben ser las características que debe reunir un ámbito de la realidad para que podamos aplicarle nuestro cálculo.

El concepto de *interpretación* es el concepto clave de la semántica. Interpretar un formalismo es señalar un conjunto de entidades al que los signos se referirán. Ya sabemos que puede haber muchas interpretaciones diferentes de nuestro formalismo, incluso hemos utilizado algunas de ellas, como enunciados, canales, circuitos, etc. Pasemos ahora a definir las relaciones entre nuestro formalismo y sus interpretaciones.

Dada una fórmula de nuestro formalismo y una interpretación de éste, la interpretación puede *satisfacer* o no la fórmula. Si, por ejemplo, interpretamos nuestras fórmulas como enunciados, el concepto de satisfacción coincide con el de verdad. Escribiremos 'I sat A' para indicar que la interpretación I satisface la fórmula A.

¿Cuándo una fórmula es satisfecha por una interpretación? He aquí una definición:

I sat $\neg A$\1 si y sólo si I no sat A.

I sat $A \wedge B$\1 si y sólo si I sat A y I sat B.

las hemos escrito en virtud de la regla segunda. Podemos continuar el árbol aplicando a la línea 2 la regla de inferencia correspondiente, que en este caso es la regla del CONDICIONADOR.

1	$\neg\alpha$	P
2	$\alpha\rightarrow\beta$	P
3	$\neg\beta$	P
4	$\neg\alpha$ $\quad$ β	R $\rightarrow$ 2

Podríamos continuar el árbol aplicando reglas de inferencia a las líneas existentes (por ejemplo, la regla de la DOBLE NEGACION (R ØØ) a la línea 1), pero como ejemplo es suficiente de momento. Hay que señalar, no obstante, que ahora el árbol tiene dos "ramas" y que todas las líneas deben tener a la derecha la indicación de qué regla se ha aplicado para obtenerla y a cuál de las líneas se le ha aplicado.

Llamamos deducción a un árbol en el que todas y cada una de sus ramas haya una fórmula y su negación. El ejemplo que hemos utilizado es un ejemplo de deducción, puesto que en la rama de la izquierda está $\neg\alpha$ y también $\neg\neg\alpha$, que es su negación, y en la rama de la derecha están β y $\neg\beta$. Diremos que una fórmula A se deduce de un conjunto de fórmulas Δ si podemos construir con ellas un árbol que sea una deducción. A la fórmula que se deduce de un conjunto de fórmulas Δ se le llama conclusión. Al conjunto D se le denomina conjunto de premisas (de ahí la "P" con la que juatificábamos la presencia de sus elementos en el árbol). A las deducciones sin premisas (en las que Δ es $\emptyset$) las llamamos demostraciones.

EJEMPLO DE DEDUCCION

Se trata de comprobar que $\alpha\rightarrow\beta$ se deduce de $\alpha\leftrightarrow\beta$. En este caso sólo hay una premisa, $\alpha\leftrightarrow\beta$. La conclusión es $\alpha\rightarrow\beta$.

La primera regla de construcción nos dice que la primera línea del árbol debe ser la negación de la conclusión; así, escribimos:

1	$\neg(\alpha\rightarrow\beta)$

La segunda regla de construcción nos dice que podemos poner como línea a la premisa; así, escribimos:

1	$\neg(\alpha\rightarrow\beta)$	
2	$\alpha\leftrightarrow\beta$	P

(El trazo vertical que une 1 y 2 nos indica que sólo hay, de momento, una rama. La "P" de la derecha de la línea 2 nos indica que es una premisa).

La única manera de añadir nuevas líneas en busca de que nuestro árbol sea una deducción es aplicar reglas de inferencia. La línea 2 es una fórmula bicondicional. Podemos, por tanto, aplicarle la regla R$\leftrightarrow$ y en consecuencia escribir:

1	$\neg(\alpha\rightarrow\beta)$	
2	$\alpha\leftrightarrow\beta$	P
3	$\alpha\rightarrow\beta$	R $\leftrightarrow$ 2
4	$\beta\rightarrow\alpha$	R $\leftrightarrow$ 2

Las indicaciones a la derecha de 3 y 4 nos indican cómo las hemos obtenido, es decir, aplicando R $\leftrightarrow$ a la línea 2. Si nos fijamos en nuestro árbol veremos que ya es una deducción y que por lo tanto no hace falta seguir aplicando reglas de inferencia. En efecto, en la única rama que el árbol tiene podemos encontrar la fórmula (línea 3) $\alpha\rightarrow\beta$ y su negación (línea 1) $\neg(\alpha\rightarrow\beta)$.

En consecuencia podemos decir que $\alpha\rightarrow\beta$ se deduce de $\alpha\leftrightarrow\beta$. Simbólicamente $\alpha\leftrightarrow\beta \;\therefore\; \alpha\rightarrow\beta$. El signo "$\therefore$" nos indica que la fórmula que

2- $(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow ((\gamma \rightarrow \alpha) \rightarrow (\gamma \rightarrow \beta))$ R3 1

T. 2. $\therefore$ $\alpha \rightarrow (\alpha \vee \alpha)$

Prueba:

1- $\alpha \rightarrow (\alpha \vee \alpha)$ R2 Ax2 (α/β)

T. 3. $\therefore$ $\alpha \rightarrow \alpha$

Prueba:

1- $((\alpha \vee \alpha) \rightarrow \alpha) \rightarrow (\alpha \rightarrow (\alpha \vee \alpha) \rightarrow (\alpha \rightarrow \alpha))$ R2 T1 ($\alpha\vee\alpha/\alpha,\alpha/\beta,\alpha/\gamma$)

2- $(\alpha \rightarrow (\alpha \vee \alpha)) \rightarrow (\alpha \rightarrow \alpha)$ R1 Ax1,1

3- $\alpha \rightarrow \alpha$ R1 T2,2

La manera axiomática de presentar una teoría tiene una larguísima tradición en la historia de la ciencia. La obra del matemático griego Euclides *Elementos*, verdadero compendio de la matemática de la antigüedad clásica, está estructurada axiomáticamente. La presentación axiomática de una teoría tiene la ventaja de que al estar resumida la teoría en los axiomas, todo lo que podamos decir sobre los axiomas queda dicho sobre la teoría.

En principio, cualquier fórmula puede ser elegida como axioma, aunque suelen elegirse cuidadosamente para que puedan derivarse de ellos todos los teoremas que interesen. Los axiomas deben cumplir la condición de ser independientes unos de otros, es decir, deben ser tales que no haya ninguno de ellos que sea derivable de los otros. El conjunto de axiomas debe ser, pues, el mínimo posible. Se puede citar aquí que la demostración de la independencia de uno de los axiomas de Euclides dió lugar a la formulación de teorías geométricas hasta entonces insospechadas.

Ax. 4. $(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow ((\gamma \vee \alpha) \rightarrow (\gamma \vee \beta))$

2. REGLAS DE TRANSFORMACION

R. 1. Regla de separación. (*Modus Ponens*).

Dados un condicional y su antecedente podemos escribir el consecuente.

R. 2. Reglas de sustitución de variables.

Toda variable puede siempre ser sustituida por una fórmula con tal que dentro de una cierta fórmula la misma variable sea sustituida en todos los casos por la misma fórmula.

R. 3. Regla de sustitución definicional.

Cualquier fórmula puede ser sustituida por otra fórmula de acuerdo con las siguientes definiciones:

$$A \wedge B =_{df} \neg(\neg A \vee \neg B)$$

$$A \rightarrow B =_{df} \neg A \vee B$$

$$A \leftrightarrow B =_{df} (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$$

Vamos a ver ahora algunos ejemplos de demostración de teoremas. A la derecha de cada línea se indica en primer lugar la regla de transformación por cuya aplicación se ha obtenido la línea, en segundo lugar el axioma, teorema o línea a la que se ha aplicado la regla para obtener la línea y en tercer y último lugar se indican entre paréntesis las sustituciones realizadas si es que se ha aplicado la regla 2.

T. 1. $\therefore (\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow ((\gamma \rightarrow \alpha) \rightarrow (\gamma \rightarrow \beta))$

Prueba:

1- $(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow ((\neg\gamma \vee \alpha) \rightarrow (\neg\gamma \vee \beta))$ R2 Ax4 ($\neg\gamma/\gamma$)

está a su derecha se deduce de la que está a su izquierda.

EJEMPLO DE DEMOSTRACION

$\therefore ((\alpha \vee \beta) \wedge \neg\beta) \rightarrow \alpha$

1	$\neg(((\alpha \vee \beta) \wedge \neg\beta) \rightarrow \alpha)$	
2	$(\alpha \vee \beta) \wedge \neg\beta$	R$\neg\rightarrow$ 1
3	$\neg\alpha$	R$\neg\rightarrow$ 1
4	$\alpha \vee \beta$	R$\wedge$ 2
5	$\neg\beta$	R$\wedge$ 2
6	α $\quad$ β	R$\vee$ 4

En la rama de la izquierda encontramos en 6 α y en 3 $\neg\alpha$ y en la de la derecha en 6 β y en 5 $\neg\beta$ tal como se exigía para que nuestro árbol fuera una deducción. Como no hemos usado premisas se trata de una demostración.

ESTRATEGIAS PARA LA CONSTRUCCIÓN DE ÁRBOLES

Cualquier árbol que esté formado siguiendo las reglas es un árbol correcto, pero aunque nuestro objetivo principal sea conseguir árboles correctos que sean deducciones, no por eso debemos dejar de tener en cuenta cosas como la facilidad, la brevedad, la elegancia, etc., en la construcción de nuestras deducciones y demostraciones. Por ello, conviene seguir las siguientes líneas estratégicas cuando nos pongamos a construir un árbol:

1.- Interesa aplicar las reglas de inferencia en primer lugar a aquellas fórmulas que sólo den lugar a una rama, para evitar en lo posible la repetición de la aplicación de una regla en varias ramas.

2.- No hay que tener prisa en introducir las premisas. Puede ser que una premisa sólo sea necesaria en una parte del árbol, por lo que introducirla antes podría suponer "cargar" con ella más tiempo del necesario.

3.- Hay que ser cuidadoso a la hora de numerar las líneas y de indicar cuál es su origen, pues así, en caso de error, nos será más fácil recordar lo que hemos hecho y, por ende, rectificarlo.

CALCULO AXIOMÁTICO

Ya dijimos que un cálculo es un conjunto de reglas. Ello supone que puede haber cálculos de diferentes formas según sean las reglas que utilicemos. El cálculo que nosotros hemos estudiado y manejado es un cálculo basado en reglas de inferencia, que se llama también de deducción natural, porque algunas de sus versiones ponen especial cuidado en que las reglas de inferencia reflejen formas de argumentación comunes en el lenguaje ordinario. En nuestro cálculo esto era así sólo de manera muy relativa, pues lo que buscábamos sobre todo era que su manejo fuese lo más sencillo posible. Hay algunas otras formas de presentar un cálculo lógico, y por su especial importancia nosotros vamos a estudiar ahora en qué consiste la presentación *axiomática* de un cálculo.

La clave de un cálculo axiomático está en que en ellos existe un conjunto de fórmulas que desempeña un papel especial, diferente al de las demás fórmulas. Estas fórmulas destacadas del resto reciben el nombre de *axiomas*. Dentro de un sistema axiomático las reglas de transformación nos permiten averiguar, no si una fórmula es deducible de otras, como es el caso en un cálculo de deducción natural, sino si una fórmula es o no un *teorema*. Son teoremas precisamente aquellas fórmulas que pueden obtenerse a partir de los axiomas aplicando las reglas de transformación. Los axiomas, por así decir, "se dan por sentados", no necesitamos demostrarlos. Constituyen los cimientos sobre los que edificamos. Por eso debemos demostrar que un presunto teorema descansa sobre ellos. Vamos a ver un ejemplo de cálculo axiomático de orden cero sacado de la obra de Russell y Whitehead *Principia Mathematica*.

1. AXIOMAS

Ax. 1. $(\alpha \vee \alpha) \rightarrow \alpha$

Ax. 2. $\alpha \rightarrow (\alpha \vee \beta)$

Ax. 3. $(\alpha \vee \beta) \rightarrow (\beta \vee \alpha)$

1	$\neg A$	
2	Δ	P

podemos escribir otra línea que sea $\neg A$ aplicando a la línea 1 la regla de repetición, por lo que es innecesario introducirla como premisa, tal como queríamos probar.

Estos son sólo una muestra de los muchos teoremas que podrían probarse sobre nuestro cálculo. Todos ellos nos describirían las propiedades de nuestro cálculo.

REGLAS DERIVADAS

Algunas veces nos gustaría contar con más reglas de inferencia con el fin de poder construir una deducción más rápidamente, o con menor complicación. Un caso claro dde ello son las reglas del bicondicionador (R $\leftrightarrow$ y R $\neg\leftrightarrow$) que casi cada vez que las aplicamos nos obligan a usar luego dos veces las reglas de condicionador. ¿No habría manera de contar con una regla que nos abreviara estos pasos que se repiten tanto? La respuesta es sí. Para poder hacerlo necesitamos definir una nueva regla de inferencia. Estas reglas, casi no hace falta decirlo, se llaman reglas definidas o derivadas. Se definen a partir de las reglas que ya conocemos y a las que llamaremos a partir de ahora reglas primitivas.

¿Cómo podemos definir una regla? No es difícil. Si hacemos un poco de memoria recordaremos que los esquemas de las reglas estaban divididos en dos por una regla horizontal. El esquema lo interpretamos como una instrucción que nos permite escribir lo que hay debajo de la línea cuando nos encontramos ante lo que hay encima. Pues bien, para demostrar que una regla derivada de inferencia es una regla válida todo lo que tenemos que hacer es mostrar que es legítimo escribir lo que haya debajo de la línea horizontal de su esquema cuando tengamos lo que haya encima. Esto podemos hacerlo mediante un árbol. Este árbol debe reunir unas condiciones que son las que siguen:

1- Sus primeras líneas deben ser las líneas que haya sobre la línea horizontal de la regla que queremos definir.

2- En el transcurso de la aplicación de reglas de inferencia primitivas (o de otras derivadas ya definidas previamente) debemos llegar a lo que haya por debajo de la línea horizontal del esquema de la regla.

Veamos un ejemplo. Vamos a definir unas nuevas reglas para el bicondicionador. A la primera de ellas la llamaremos NUEVA REGLA DEL BICONDICIONADOR. Su esquema es el siguiente:

Pasemos ahora a su derivación. Como por encima de la línea horizontal sólo hay una línea que podamos escribir en cumplimiento de la primera condición de una

A↔B

¬A B

¬B A

derivación, escribimos:

1	A↔B	

El paso siguiente es ir aplicando reglas de inferencia ya conocidas hasta conseguir que en nuestro árbol aparezca lo que hay por debajo de la línea horizontal de NR ↔.

1	A↔B	
2	A→B	R↔1
3	B→A	R↔1
4	¬A B	R→2
5	¬B A ¬B A	R→3
	1 2 3 4	

Sólo tenemos que darnos cuenta ahora de que las ramas 2 y 3 ya están «cortadas», es decir, en ellas hay una fórmula y su negación, por lo que es innecesario continuarlas. Por consiguiente, las únicas ramas que siguen «vivas» son la 1 y la 4. Si eliminamos las ramas «cortadas» nos queda el siguiente árbol:

1	A↔B	
2	A→B	R↔1
3	B→A	R↔1
4	¬A B	R→2
5	¬B A	R→3
	1 4	

3	B	P
4	Γ	P
.		.
.	.	.
.	.	.
n	.	.

Imaginemos ahora otra que empezase así:

1	¬Λ	
2	A∧B∧Γ∧ ...	P

Por aplicaciones repetidas de R ∧ obtendríamos un árbol idéntico al primero a partir de la línea 2. Si existe este árbol entonces A ∧ B ∧ Γ ∧ ... ∴ Λ., tal como queríamos demostrar.

TEOREMA 3: Sea Δ un conjunto de fórmulas y sea A una fórmula. Si Δ, ¬A ∴ A entonces Δ ∴ A.

En otras palabras, si entre las premisas de una deducción está la negación de la conclusión, podemos prescindir de ella.

PRUEBA: Si Δ, ¬A ∴ A es que existe una deducción así:

1	¬A	
2	Δ	P
3	¬A	P
.	.	
.	.	
n	.	

Ahora bien, si tenemos solo

Pasemos a ver un ejemplo:

Si $\alpha \therefore \alpha\vee\beta$ entonces $\therefore\ \alpha \rightarrow (\alpha\vee\beta)$.

DEDUCCION DE $\alpha\vee\beta$ A PARTIR DE α.

1	$\neg(\alpha\vee\beta)$	
2	α	P
3	$\neg\alpha$	R $\neg\vee$ 1
4	$\neg\beta$	R $\neg\vee$ 1

DEDUCCION DE $\alpha \rightarrow (\alpha\vee\beta)$.

1	$\neg(\alpha \rightarrow (\alpha\vee\beta))$	
2	α	R $\neg\rightarrow$ 1
3	$\neg(\alpha\vee\beta)$	R $\neg\rightarrow$ 1
4	$\neg\alpha$	R $\neg\vee$ 3
5	$\neg\beta$	R $\neg\vee$ 3

Puede comprobarse que la demostración de $\alpha \rightarrow (\alpha\vee\beta)$ es idéntica a la deducción de $(\alpha\vee\beta)$ a partir de a salvo en que tiene una línea más.

TEOREMA 2. Si una fórmula es deducible de otras, también lo es de su conjunción.

Es decir, por ejemplo: si $A, B, \Gamma,... \therefore \Lambda$ entonces,

$$A \wedge B \wedge \Gamma \wedge ... \therefore \Lambda.$$

PRUEBA: Si $A, B, \Gamma,... \therefore \Lambda$ es que existe una deducción así:

1	$\neg\Lambda$	
2	A	P

Esto es lo que andábamos buscando. Si quitamos las líneas 2 y 3 nuestro árbol es idéntico al que obtendríamos aplicando NR $\leftrightarrow$ a la línea 1. Nuestra nueva regla es ya una regla legítima de inferencia, pues hemos demostrado que todo lo que se puede hacer con ella se puede hacer también sin ella.

Pasemos a ver un ejemplo práctico de su aplicación. Vamos a hacer dos veces la deducción correspondiente a $\alpha\leftrightarrow\beta, \neg\alpha \therefore \neg\beta$. La primera la haremos sin utilizar la nueva regla, mientras que en la segunda sí que la usaremos.

1	$\neg\neg\beta$	
2	$\neg\alpha$	P
3	$\alpha\leftrightarrow\beta$	P
4	$\alpha\rightarrow\beta$	R$\leftrightarrow$3
5	$\beta\rightarrow\alpha$	R$\leftrightarrow$3
6	$\neg\beta$ α	R$\rightarrow$5

1	$\neg\neg\beta$	
2	$\neg\alpha$	P
3	$\alpha\leftrightarrow\beta$	P
4	$\neg\alpha$ β	NR$\leftrightarrow$3
5	$\neg\beta$ α	NR$\leftrightarrow$3

Aun siendo tan sencillo el ejemplo nos ilustra la utilidad de las reglas derivadas. ¿Te atreves a proponer y derivar la NUEVA REGLA DEL BICONDICIONADOR NEGADO? Atrévete.

Lo que ahora sigue es un repaso de una serie de reglas de inferencia muy conocidas (incluso famosas y estudiadas desde la antigüedad) que merece la pena conocer, pues todos las aplicamos con frecuencia en el lenguaje ordinario.

MODUS PONENDO-PONENS

$$\begin{array}{c} A \to B \\ | \\ A \\ \hline | \\ B \end{array} \qquad \text{MP}$$

Un ejemplo sencillo de un argumento con la estructura del *Modus ponendo-ponens* sería: «Si bajan los impuestos aumenta el déficit. Los impuestos bajan. En consecuencia, el déficit aumenta.»

MODUS TOLLENDO-TOLLENS

$$\begin{array}{c} A \to B \\ | \\ \neg B \\ \hline | \\ \neg A \end{array} \qquad \text{MT}$$

Ejemplo: «Si juegas a la ruleta te arruinas. No estás arruinado. Por consiguiente, no has jugado a la ruleta.»

SILOGISMO DISYUNTIVO

$$\begin{array}{c} A \vee B \\ | \\ \neg A \\ \hline | \\ B \end{array} \qquad \text{SD}$$

Ejemplo: «Una de dos: o vamos a la playa o a la montaña. La playa queda descartada por razones económicas. Por lo tanto, iremos a la montaña.»

DILEMA

$$\begin{array}{c} A \vee B \\ | \\ A \to \Gamma \\ | \\ B \to \Gamma \\ \hline | \\ \Gamma \end{array} \qquad \text{D}$$

Ejemplo: «Podemos ir al cine o al teatro. Si vamos al cine nos quedaremos sin dinero para merendar. Si vamos al teatro nos pasará tres cuartos de lo mismo. Por consiguiente, nos quedaremos sin merendar por falta de dinero.»

TEOREMAS SINTACTICOS

A partir de las definiciones que disponemos de fórmula, deducibilidad,

etc. podemos extraer consecuencias en forma de teoremas que nos permitirán explorar algunos aspectos y propiedades de nuestro formalismo y de nuestro cálculo. Veamos algunos de estos teoremas:

TEOREMA 1. Sean A y B fórmulas, si $A \therefore B$ entonces $\therefore A \to B$

El teorema nos dice que si una fórmula se deduce de otra entonces es posible demostrar la fórmula condicional que tiene a la premisa de la deducción como antecedente y a la conclusión como consecuente.

PRUEBA: Si $A \therefore B$ entonces existe una deducción de la forma:

$$\begin{array}{lcl} 1 & \neg B & \\ & | & \\ 2 & A & \text{P} \\ & | & \\ . & . & \\ . & . & \\ . & . & \\ n & . & \end{array}$$

de tal manera que en todas las ramas existe una fórmula y su negación.

Supongamos que intentamos construir una demostración para $A \to B$. La primera línea sería:

$$1 \qquad \neg(A \to B),$$

y las líneas 2 y 3, por aplicación de R $\neg\to$ a la línea 1 serían:

$$\begin{array}{lcl} 2 & A & \text{R } \neg\to 1 \\ & | & \\ 3 & \neg B & \text{R } \neg\to 1 \end{array}$$

que son precisamente las dos primeras líneas del árbol correspondiente a $A \therefore B$. Por lo tanto, nos basta con copiar, debajo de las tres líneas que ya tenemos, el árbol de $A \therefore B$ a partir de su línea 3 para obtener la demostración de $A \to B$, lo cual es precisamente lo que queríamos probar.